تاریخچهٔ جبر کلاسیک (۲)

ایسرائل کلاینر
مترجمان: روح‌الله جهانی‌پور (دانشگاه کاشان)
سعید مقصودی (دانشگاه زنجان)

۶. نمادگذاری جبری: وی‌یِت[1] و دکارت

نمادگذاری در ریاضیات امروزه امری مسلم فرض می‌شود و در واقع ریاضیات بدون یک چارچوب درست و حسابی برای نمادگذاری، قابل درک نیست. اما باید توجه کرد که حدود سه هزار سال، ریاضیات بدون کمترین نمادی در حال پیشرفت بوده است. معرفی و تکامل نمادگذاریِ جبری، عمدتاً در قرن شانزدهم و اوایل قرن هفدهم توسط **وی‌یت** و **دکارت** روی داد. گام تصمیم‌ساز را وی‌یِت در کتابش با عنوان «آشنایی با فن تحلیل»[2] به سال ۱۵۹۱ برداشت. او در آن کتاب می‌خواست به روش تحلیل یونانیان باستان جانی تازه ببخشد. تحلیل روشی بود که یونانیان برای حل مسائل به‌کار می‌بردند و در نقطهٔ مقابل روش ترکیب قرار داشت که برای اثبات قضیه‌ها به‌کار می‌رفت. وی‌یِت جبر را همان روش تحلیل می‌دانست و آن را به چشم «دانش اکتشاف درست در ریاضیات» می‌نگریست. در این زمینه آن‌قدر وسعت نظر داشت که معتقد بود جبر «هیچ مسئله‌ای را حل نشده نمی‌گذارد.» ایدهٔ بنیادی وی‌یِت، وارد کردن پارامترهای دلخواه درون معادله و تمایز گذاشتن بین آن‌ها با متغیرهای معادله بود. او از حرف‌های بی‌صدا (B، C، D و...) برای نشان دادنِ پارامترها و از حرف‌های صدادار (A، E، I، ...) برای نشان‌دادنِ متغیرها استفاده می‌کرد. بنابراین یک معادلهٔ درجه دو به‌صورت $BA^2 + CA + D = 0$ نوشته می‌شد (گرچه این دقیقاً همان نمادگذاری وی‌یت نیست؛ ادامهٔ مقاله را بخوانید). از نظر ما این ایده خیلی ساده و طبیعی است، اما آغازی بسیار زیربنایی در جبر به شمار می‌آید: پس از سه هزار

سال، نخستین بار بود که می‌شد از معادلهٔ درجهٔ دوی کلی، یعنی معادله‌ای با ضریب‌های حرفی (دلخواه) به جای ضریب‌های عددی (خاص) سخن گفت. این، پیشرفتی بسیار اساسی بود، چرا که جبر را از مطالعهٔ معادلات خاص با ضریب‌های عددی، به دانش مطالعهٔ معادلات کلی با ضریب‌های کلی تبدیل می‌کرد. خود وی‌یت دست به پژوهشی سازمان‌یافته دربارهٔ معادلات چند جمله‌ای با ضریب‌های حرفی زد. برای مثال، او رابطهٔ بین ریشه‌ها و ضریب‌های معادلات چند جمله‌ای با درجهٔ حداکثر پنج را صورت‌بندی کرد. اکنون دیگر جبر موضوعی بسیار مجردتر شده و در مسیر تبدیل به یک دانش نمادین قرار گرفته بود.

پیامدهای پژوهش‌های وی‌یت خیلی گسترده‌تر از کاربرد

آن‌ها در جبر بود. او دانشـــی نمادین آفریده بود که پهنهٔ کاربرد گسترده‌ای داشت و در آن، هم بر کشف و هم بر اثبات نتایج تأکید می‌شـــد. (مثلاً اثبات کلامی کاردانو را که در سه صفحه فرمول جواب معادلهٔ درجه سه را استنتاج کرد، با اثبات نمادینِ امروزیِ آن در نیم صفحه مقایسه کنید. یا تلاش کنید رابطه بین ریشه‌ها و ضریب‌های یک معادلهٔ چندجمله‌ای را بدون به‌کار بردن نمادها بیان کنید!) معلوم شد که دیدگاه‌های وی‌یت در پیشرفت هندسهٔ تحلیلی، حساب دیفرانسیل و انتگرال و علوم دیگری که چارچوب ریاضی‌وار دارند، در قرن هفدهم بسیار اساسی بوده است. با وجود ایـــن، کارهای وی‌یت، کلام آخر در صورت‌بندی یک جبر کاملاً نمادین نبود. برخی از کاستی‌های کارهای او از این قرارند:

● روش نمادگـــذاری وی‌یت نیمه‌نمادین (یعنی بخشـــی نمادین و بخشـــی کلامی) بـــود. برای مثـــال، معادله‌ای مانند $x^۳+۳B^۲x=۲C^۳$ به روش وی‌یت به این صورت بیان می‌شود: A به توان سه به اضافهٔ ۳ تا مربع B ضرب در A برابر است با ۲ تا مکعب C (در اینجا به جای مجهول x حرف A را قرار داده‌ایم).

ریاضیات یونانیان باستان به‌ویژه در هندسه و نظریهٔ عددها نسبتاً پیشرفته و ماهرانه بود، ولی جبر آن‌ها ضعیف بود. در اثر عظیم اقلیدس، «اصول» (حدود ۳۰۰ ق.م.)، بخش‌هایی وجود دارد که تاریخ‌دانان (به منابع شمارهٔ ۱۴ و ۱۶ مراجعه کنید)، به استثنای چند مورد مهم، آن‌ها را دارای ماهیت جبری می‌دانند

● عبارت‌هـــای جبری که وی‌یت مطالعه می‌کرد «همگن» بودند، یعنی همهٔ جمله‌های آن‌ها هم‌درجه بودند. به همین دلیل است که معادلهٔ بالا طوری نوشته شده است که برای ما نامعمول به نظر می‌آید. درجهٔ همهٔ جمله‌ها ســـه است. این لزوم همگن بودنِ معادلات، ریشه در اندیشه‌های یونانیان باستان داشت که هندسه را حاکم مطلق بر اندیشه‌های خود می‌دانستند. در روش اندیشیدنِ یونانیان، حاصل ضرب ab مساحت یک مستطیل به اضلاع a و b را نشان می‌داد؛ به‌طور مشابه abc حجم یک مکعب بود. بنابراین عبارتی مانندab+c معنا نداشت، چون نمی‌شد طول را با مســـاحت جمع کرد. نزدیک به دو هزار سال، این اندیشه‌ها بخشی جدانشدنی از شیوه‌های ریاضی‌ورزی بودند.

● جنبهٔ دیگـــر میراث یونانیان، اثبات‌های هندســـی برای نتایج جبری بود که در کارهای خوارزمی و کاردانو نیز به چشم می‌خورد و وی‌یت هم از این قاعده مستثنا نبود.

● وی‌یت ریشه‌های معادله‌ها را به عددهای حقیقی مثبت منحصر کرد که البته این موضوع با توجه به تمایلات هندســـیِ او قابل درک اســـت، زیرا در آن زمان هیچ نمایش هندسی برای عددهای منفی و عددهای مختلط وجود نداشت.

دکارت در کتاب مهمش با عنوان «هندسه» به سال ۱۶۳۷، بسیاری از این مشکلات را مرتفع ساخت. او در این کتاب، مبانی هندسهٔ تحلیلی را شرح داده است. روش بیان دکارت، کاملاً نمادین است و نمادگذاری او اساساً امروزی به حساب می‌آید. (شاید بهتر باشد بگوییم نمادگذاری امروزی شبیه نمادگذاری دکارت است!) برای نمونه، او از z ،y ،x و ... برای نمایش متغیرها و از a ،b ،C و... برای نمایش پارامترها استفاده می‌کند. مهم‌تر اینکه او یک جبر برای پاره‌خط‌ها ابداع کرد. به عبارت دیگر، او برای هر دو پاره‌خط بـــا طول‌های a و b، پاره‌خط‌هایی با طول‌های a×b ، a+b ، a–b و a/b ساخت. بنابراین همگنيِ عبارت‌های جبری، دیگر مورد نیاز نبود و عبارتی مانند ab+c مشروع دانسته می‌شد؛ چرا که طول یک پاره‌خط بود. این دیدگاه دستاوردی بسیار مهم بود، زیرا نیاز جبر به هندســـه را برطرف می‌کرد. دو هزار سال بود که هندسه تا اندازهٔ زیادی، زبان ریاضیات به حساب می‌آمد. اکنون وقت آن رسیده بود که این نقش را به جبر واگذارد

Bashmakova & Smirnova, 2000; Katz, 1998; kline, 1971; PARSHAF, 1988: 129-164; van der waerden, 1985]

۷. نظریهٔ معادلات و قضیهٔ اساسی جبر

کارهای وی‌یت و دکارت به ترتیب، در اواخر قرن شانزدهم و اوایل قرن هفدهم، مرکز توجه را از حل‌پذیریِ معادلات عددی، به مطالعهٔ نظریِ معادلات دارای ضریب‌های حرفی کشاند و این‌گونه بود که نظریهٔ معادلات چندجمله‌ای پدید آمد. در میان مباحث این نظریه، بررســـی وجود، ماهیت و تعداد ریشه‌های این‌گونه معادلات به چشم می‌خورد، به‌ویژه:

● آیا هر معادلهٔ چند جمله‌ای ریشه دارد و اگر دارد، این ریشه از چه نوعی است؟ این مهم‌ترین و مشکل‌ترین پرسش در موضوع حل معادلات چندجمله‌ای اســـت. معلوم شد که پاسخ دادن به بخش اول این سؤال خیلی آسان‌تر از پاسخ دادن به بخش دوم است. قضیهٔ اساســـی جبر به هر دو بخش پاسخ می‌گفت: «هر معادلهٔ چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی یا مختلط، دست‌کم یک ریشهٔ مختلط دارد.»

● تعداد ریشـــه‌های یک معادلهٔ چند جمله‌ای چند تاست؟ دکارت در کتاب «هندســـه» در قضیه‌ای به نام «قضیهٔ عامل»، ثابت می‌کند که: اگر α یک ریشهٔ چندجمله‌ای ρ(x) باشد، آن‌گاه

$x-\alpha$ یک عامل این چند جمله‌ای است. به عبارت دیگر: $p(x)=(x-\alpha)q(x)$ که در آن، درجهٔ چندجمله‌ای $q(x)$ یکی کمتر از درجهٔ $p(x)$ است. با تکرار این فرایند (به‌طور صوری، با استفاده از استقرا) ثابت می‌شود که هر چندجمله‌ای از درجهٔ n با فرض اینکه یک ریشه داشته باشد (وجود این ریشه را قضیهٔ اساسی جبر تضمین می‌کند)، دقیقاً n ریشه دارد که ممکن است متمایز نباشند. این نتیجه حکم می‌کند که اگر چندجمله‌ای $p(x)$ دارای درجهٔ n باشد، آن‌گاه n تا عدد α_1، α_2، ...، α_n وجود دارند، به‌طوری که $p(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$.[3] قضیهٔ اساسی جبر می‌گوید: این α_i ها مختلط هستند (دقت کنید که هر وقت از ریشهٔ α برای چندجمله‌ای $p(x)$ یا ریشهٔ α برای معادلهٔ چندجمله‌ای $p(x)=0$ سخن می‌گوییم، منظورمان این است که: $p(\alpha)=0$).

● آیا می‌توانیم معین کنیم که چه وقت ریشه‌های یک معادلهٔ چندجمله‌ای گویا، حقیقی، مختلط یا مثبت هستند؟ هر چند جمله‌ای از درجهٔ فرد با ضرایب حقیقی، دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی دارد. این نتیجه را در قرن‌های هفدهم و هیجدهم بر پایهٔ درک شهودی پذیرفته بودند، اما در قرن نوزدهم به‌عنوان نتیجه‌ای ساده از «قضیهٔ مقدار میانی» در حساب دیفرانسیل و انتگرال ثابت شد. قضیه مقدار میانی (در شمایلی که اینجا بدان نیازمندیم) می‌گوید: اگر مقدار تابع پیوستهٔ $f(x)$ به ازای مقداری از x مثبت و به ازای مقداری دیگری از x منفی شود، باید تابع f در نقطه‌ای مانند x_0 ریشه داشته باشد؛ یعنی: $f(x_0)=0$.

نیوتن ثابت کرد که ریشه‌های مختلط یک معادلهٔ چندجمله‌ای اگر موجود باشند، به‌صورت جفت‌های مزدوج ظاهر می‌شوند. به این معنا که اگر $a+ib$ یک ریشهٔ $p(x)$ باشد، آن‌گاه $a-ib$ ریشهٔ دیگری از آن است. دکارت الگوریتمی برای یافتن ریشه‌های گویای (در صورت وجود) چندجمله‌ای $p(x)$ با ضرایب صحیح ارائه کرد؛ از این قرار که: فرض کنید:

$p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$

اگر a/b یک ریشهٔ گویای $p(x)$ باشد که a و b نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه باید a مقسوم‌علیه a_0 و b مقسوم‌علیه a_n باشد. چون تعداد مقسوم‌علیه‌های a_0 و a_n متناهی است، این نتیجه در تعدادی متناهی گام، همهٔ ریشه‌های گویای $p(x)$ را به دست می‌دهد (توجه کنید که هر کسر a/b که در آن a مقسوم‌علیه a_0 و b مقسوم علیه a_n باشد، یک ریشهٔ گویای $p(x)$ نیست). دکارت همچنین آنچه را که بعداً «قانون علامت‌های دکارت» نام گرفت (بدون اثبات)، بیان کرد:

تعداد ریشه‌های مثبت چندجمله‌ای $p(x)$ از تعداد تغییر علامت‌های ضرایب $p(x)$ (از «+» به «−» و از «−» به «+») تجاوز نمی‌کند و تعداد ریشه‌های منفی $p(x)$ حداکثر برابر با تعداد دفعاتی است که دو علامت «+» یا دو علامت «−» پشت سر هم یافت شوند.

● رابطهٔ بین ریشه‌ها و ضریب‌های یک چندجمله‌ای چیست؟ مدت‌های طولانی می‌دانستند که اگر α_1 و α_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوی $p(x)=ax^2+bx+c=0$ باشند، آن‌گاه: $\alpha_1\alpha_2=c/a$ و $\alpha_1+\alpha_2=-b/a$.

وی‌یت این نتیجه را به معادلات چندجمله‌ای با درجهٔ حداکثر

بین قرن‌های نهم تا پانزدهم پس از میلاد، ریاضی‌دانان اسلامی به دستاوردهایی مهم در حوزهٔ جبر نائل آمدند. شاید برجسته‌ترین آن‌ها محمدبن موسی خوارزمی (حدود ۸۵۰-۷۸۰ م.) باشد که برخی او را «اقلیدس جبر» لقب داده‌اند

پنج تعمیم داد و فرمول‌هایی به دست داد که در آن‌ها مجموع‌ها و حاصل ضرب‌های معینی از ریشه‌های یک چند جمله‌ای برحسب ضریب‌های آن بیان می‌شدند. نیوتن نتیجه‌ای کلی از این گونه را برای چند جمله‌ای‌هایی با درجهٔ دلخواه ثابت کرد و در اثر این کار بود که مفهوم مهم «تابع متقارن» برحسب ریشه‌های یک چندجمله‌ای پدیدار شد.

● ریشه‌های یک چندجمله‌ای را چگونه بیابیم؟ مطلوب‌ترین راه این است که فرمولی دقیق برای ریشه‌ها در دست داشته باشیم؛ ترجیحاً فرمولی برحسب رادیکال‌ها. دیدیم که چنین فرمول‌هایی برای معادلات با درجهٔ حداکثر چهار وجود داشت و لذا کوشش‌ها به سمت تعمیم این نتیجه‌ها برای معادلات با درجهٔ بیشتر رفت. در غیاب فرمول‌های دقیق برای محاسبهٔ ریشه‌ها، روش‌های متعددی برای یافتن تقریبی آن‌ها با هر میزان از دقت ارائه شد. در میان نخستین روش‌های تقریبی، روش نیوتن و روش هُرنر به ترتیب، در اواخر قرن هفدهم و اوایل قرن نوزدهم جای دارند. در اولی حساب دیفرانسیل و انتگرال به کار گرفته شده بود.

چندین بیان هم‌ارز برای قضیهٔ اساسی جبر وجود دارد که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف) هر چندجمله‌ای با ضریب‌های مختلط، یک ریشهٔ مختلط دارد.

ب) هــر چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی، یک ریشــهٔ مختلط دارد.

پ) هــر چندجمله‌ای بــا ضریب‌های حقیقــی را می‌توان به‌صورت حاصل ضــرب چندجمله‌ای‌های خطی با ضریب‌های مختلط نوشت.

ت) هــر چندجمله‌ای بــا ضریب‌های حقیقــی را می‌توان به‌صورت حاصل ضرب چندجمله‌ای‌هــای خطی و درجهٔ دو با ضریب‌های حقیقی نوشت.

بیان‌ها (نه اثبات‌ها)ی قضیهٔ اساسی جبر را **ژیرار**[۴] و دکارت در اوایل قرن هفدهم ارائه کردند؛ گرچه دقت آن‌ها به سختی در اندازهٔ دقت بیان‌های بالا بود. برای مثال، دکارت قضیه‌ای آورده اســت از این قرار که: «هر معادله می‌تواند به تعداد بُعد کمیت مجهول در معادله، ریشهٔ متمایز داشته باشد.» البته قابل درک اســت که چرا او از عبارت «می‌تواند داشته باشد» استفاده کرده اســت، زیرا نســبت به کاربرد عددهای مختلط احساس خوبی نداشته است.

قضیهٔ اساسی جبر در حساب دیفرانسیل و انتگرال اواخر قرن هفدهم اهمیت بسیار یافت، زیرا ریاضی‌دانان را قادر می‌ساخت انتگرال توابع گویا را با تجزیهٔ مخرج آن‌ها به عوامل خطی و درجهٔ دو، محاسبه کنند. اما چطور می‌شد به‌درستی این قضیه اعتماد کرد؟ گرچه اغلب ریاضی‌دانان این نتیجه را درست می‌پنداشتند، **گاتفرید لایب‌نیتس**[۵] از کسانی بود که چنین نظری نداشت. برای مثال، او در مقاله‌ای به سال ۱۷۰۲ ادعا کرد که چندجمله‌ای x^4+a^4 را نمی‌توان به عوامل خطی و درجهٔ دو تجزیه کرد.

نخستین اثبات قضیهٔ اساسی جبر را **دالامبر**[۶] در سال ۱۷۴۶ ارائه کرد و بلافاصله پــس از آن، **اویلر** نیز اثباتی بیان کرد. در اثبات دالامبر از اندیشــه‌های آنالیزی استفاده شده است (به یاد داشــته باشــید که با قضیه‌ای در جبر طرف هستید)، در حالی کــه اثبات اویلر، خیلی جبری بود. هــر دو اثبات ناکامل و فاقد دقت بودند. به‌ویژه در هر دو، گفته می‌شد که هر چندجمله‌ای از درجهٔ n دارای n ریشه است که می‌توان بر پایهٔ قواعد محاسبه با عددهای حقیقی با آن‌ها کار کرد. اما در واقع آنچه ثابت شده بود، این بود که ریشه‌ها مختلط هستند.

گاوس در پایان‌نامهٔ دکترای خود که در سال ۱۷۹۷ (زمانی که فقط ۲۰ سال سن داشــت) آن را کامل و در سال ۱۷۹۹ منتشــر کرد، اثباتی برای قضیهٔ اساســی جبر ارائه کرد که بر پایهٔ استانداردهای کنونی، دقیق بود. البته اثبات گاوس هم که مبتنی بر اندیشه‌های هندسی و آنالیزی بود، از دیدگاه امروزی، ایرادهایی دارد. گاوس بعداً سه اثبات دیگر ارائه کرد (دومی و سومی اساســاً جبری بودند) که آخرین آن‌ها در سال ۱۸۴۹ بود. از آن زمان تاکنون، اثبات‌های بسیاری برای قضیهٔ اساسی جبر ارائه شده‌اند، که تعداد آن‌ها اخیراً به ۲۰۰۰ مورد رسیده است. برخی از این اثبات‌ها جبری هستند، برخی دیگر آنالیزی و بعضی هم توپولوژیکی. به همین دلیل می‌توان گفت که یک چندجمله‌ای با ضریب‌های مختلط، هم‌زمان یک شیء جبری، آنالیزی و توپولوژیکی اســت. به نظر نوعی پارادُکس می‌آید که هیچ اثبات جبری خالص برای قضیهٔ اساســی جبر وجود ندارد، زیرا معلوم شــده اســت که این حکم آنالیزی که «هر چندجمله‌ای از درجهٔ فرد با ضریب‌های حقیقی، دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی دارد»، ابزاری اجتناب‌ناپذیر در همهٔ اثبات‌های جبری است.

در اوایل قرن نوزدهم، قضیهٔ اساسی جبر، نوعی نسبتاً جدید از نتایج را وارد ریاضیات کرد: «قضیه‌های وجودی». در این گونه قضیه‌ها، وجود شیء، مثلاً ریشهٔ یک چندجمله‌ای، به روش کاملاً نظری ثابت می‌شود. برای مثال، هیچ روشی برای ساختن ریشهٔ چندجمله‌ای داده نمی‌شود، نتایج وجودیِ غیر ساختنی مجادلات بسیاری را در میان ریاضی‌دانان قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم پدیــد آورد. برخی از ریاضی‌دانان تا همیــن امروز هم این‌گونه اثبات‌ها را رد می‌کنند.

۸. جبر نمادین

مطالعهٔ حل معادلات چندجمله‌ای، طبعاً به مطالعهٔ ماهیت و ویژگی‌های دســتگاه‌های گوناگون عددها منجر شد، چرا که ریشــه‌های این‌گونه معادلات عدد هســتند. از این‌رو (چنان‌که اشــاره کردیم) مطالعهٔ دستگاه‌های عددها، بخشی مهم از جبر کلاسیک را تشکیل می‌دهد. به‌عددهای منفی و مختلط که در قرن هیجدهم غالباً مورد اســتفاده قرار می‌گرفتند (بنابر قضیهٔ اساســی جبر، نمی‌شد از دســت این گونه عددها فرار کرد)، به چشم اشیایی غیر قابل اعتماد نگریسته می‌شد و درکی کامل از آن‌ها وجود نداشت. برای مثال، نیوتن عددهای منفی را «کمتر از هیچ» می‌دانست و لایب‌نیتس می‌گفت: عدد مختلط «مابین بودن و نبودن مانده است.» اما نظر اویلر در این باره این بود که: «هر کمیتی را که پیش از آن علامت+ آمده باشد، کمیت مثبت و هر کمیتی را پیش از آن علامت - آمده باشــد، کمیت منفی بنامیم.»

گرچــه قواعــد محاســبه بــا عددهــای منفــی، مانند ۱=(۱-) (۱-)، از دوران باســتان شناخته شده بودند، در گذشته هیچ توجیهی برای درستی آن‌ها ارائه نشده بود (اویلر استدلال می‌کرد که(b-) (a-) باید برابر با ab باشــد نه ab- ، چون نشان داده شده بود که این دومی برابر با b (a-) است). در اواخر قرن

هیجدهم و اوایل قرن نوزدهم ریاضی‌دانان این پرسش را مطرح کردند که چرا چنین قواعدی درست هستند. اعضای «انجمن تحلیل در دانشگاه کمبریج»[۷] پیشرفتی مهم را در پاسخ به این پرسش موجب شدند. در دانشگاه کمبریج، ریاضیات بخشی از «مطالعات فنون آزاد»[۸] تلقی می‌شد و آن را نمونه‌ای از مجموعهٔ حقایق نابی می‌دانستند که باید برای پرورش منطقی ذهن جوانان به‌کار گرفته شود. از این رو این ریاضی‌دانان احساس می‌کردند جبر و به‌ویژه، قوانین عمل با عددهای منفی باید بر پایه‌هایی مستحکم استوار شود.

جامع‌ترین کار را در این زمینه، **پیکاک**[۹] به سال ۱۸۳۰ در «رساله‌ای در باب جبر»[۱۰] انجام داد. اندیشهٔ محوریِ او، تمایزگذاشتن میان «جبر محاسباتی» و «جبر نمادین» بود. منظور از اولی، عمل‌هایی بود که روی نمادهای نشان‌دهندهٔ عددهای مثبت انجام می‌شدند و لذا از نظر پیکاک، نیازمند استدلال نبودند. برای مثال، اگر: $b>c$ و $a>b-c$، آن‌گاه اتحاد $a-(b-c) = a-b+c$ قانونی از جبر محاسباتی است. اما اگر هیچ قیدی روی b, a و c قرار ندهیم، قانونی در جبر نمادین خواهد بود. در واقع نمادها هیچ تعبیری ندارند و لذا جبر نمادین، موضوعی نوبنیاد و دربارهٔ عمل با نمادهایی بود که به هیچ شیء خاصی اشاره نداشتند، اما از قوانین جبر محاسباتی پیروی می‌کردند. به این ترتیب پیکاک توانست قوانین جبری گوناگونی را به‌طور صوری ثابت کند. برای مثال، نشان داد که $(-a)\ (-b)$ برابر است با ab . اثبات او از این قرار است که چون اتحاد

$(a-b)\ (c-d)=ac+bd-ad-bc$

با این فرض که $a>b$ و $c>d$ ، یکی از قانون‌های جبر محاسباتی است، پس یکی از قانون‌های جبر نمادین هم به شمار می‌آید و بدون هیچ قیدی روی c, b, a و d برقرار است. قرار می‌دهیم $a=0$ و $c=0$ تا به دست آوریم: $(-b)\ (-d)= bd$.

پیکاک تلاش کرد یکسان بودن قوانین جبر محاسباتی و قوانین جبر نمادین را با استفاده از «اصل بقای قالب‌های هم‌ارز» توجیه کند. این اصل اساساً حکم می‌کرد که قوانین جبر نمادین همان قوانین جبرمحاسباتی هستند (در آن زمان، به روشنی بیان نمی‌شد که این قوانین چیستند. در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم بود که این قوانین در چارچوب اصول موضوع حلقه و میدان درآمدند و ماهیت آن‌ها آشکار شد). این اندیشه چندان تفاوتی با رهیافت نوین جبری بر حسب اصول موضوع ندارد. اهمیت آن در جزئیات نبود، بلکه به واسطهٔ رویکردی کلی بود که نشان می‌داد، تفکر دربارهٔ مبانی جبر، از تمرکز بر معنای نمادها به تأکید بر قوانین حاکم بر عمل‌های جبری تغییر رویه داده است. شاهد این مدعا، توصیف پیکاک از جبر نمادین است:

«در جبر نمادین، قواعدی هستند که معنای عمل‌ها را تعیین می‌کنند ... می‌توانیم آن‌ها را مفروضاتی دلخواه بخوانیم، زیرا به دلخواه بر گُردهٔ نمادها و ترکیب‌های آن‌ها قرار می‌گیرند؛ البته مادام که با دیگر چارچوب‌های مشتمل بر قوانین سازگار، هماهنگی داشته باشند» [Ipycior ,۱۹۸۱ :۲۳-۴۵].

این دیدگاه، خیلی حرفه‌ای و جلوتر از زمان خودش بود. با وجود این، پیکاک فقط اشاره‌ای به ماهیت دلخواه قوانین کرده بود. اما این‌ها عملاً قوانین حساب باقی ماندند. طی چند دهه پس از آن، ریاضی‌دانان انگلیسی موعظه‌های پیکاک را عملی ساختند و جبرهایی را معرفی کردند که ویژگی‌های آن‌ها از جنبه‌های گوناگون با ویژگی‌های حساب تفاوت داشت. به قول بورباکی:

«جبردانان مکتب انگلیسی نخست بین سال‌های ۱۸۳۰ تا ۱۸۵۰ مفهوم مجرد **قانون ترکیب** را انتشار دادند و بلافاصله پس از آن، با به کار بردن این مفهوم بر انبانی از اشیای جدید ریاضی، حوزهٔ جبر را گسترده ساختند: جبر منطق به دست **بول**؛ بردارها، چهارگان‌ها و دستگاه‌های آبرمختلط کلی به دست **همیلتون**؛ ماتریس‌ها و قوانین شرکت‌ناپذیری به دست **کِیلی**» [Bourbaki, ۱۹۹۴].

بنابراین جبر نمادین، با وجود محدودیت‌هایش، فضایی مساعد برای پیشرفت‌های آتی در حوزهٔ جبر فراهم آورد. نمادها و قوانین عمل با آن‌ها حیاتی مستقل برای خود یافتند و به اشیایی تبدیل شدند که خودشان شایستهٔ مطالعهٔ مستقل بودند؛ نه اینکه زبانی برای بیان رابطهٔ بین عددها باشند.

پی‌نوشت‌ها

1.François Viète
2.Introduction to Analytic Art
۳. توجه کنید که نویسنده فرض کرده است ضریب x^n در چندجمله‌ای در px برابر با ۱ است
4. Albert Girard
5. Gottfried Leibniz
6. Jean-Baptiste d'Alembert
7. Analytical Society at Cambridge University
8. liberal arts studies
9. George Peacock
10.Treatise of Algebra